信号检测与估计

第1章 经典检测与估计理论

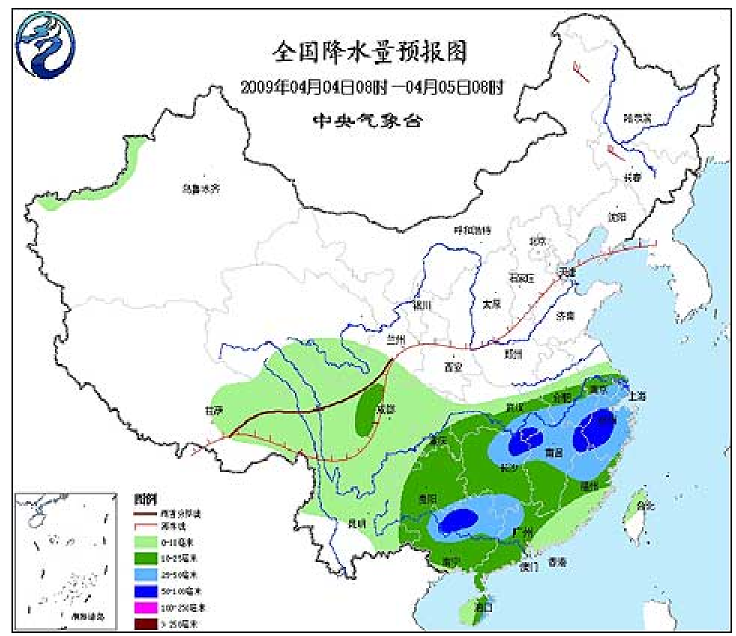
本章内容

1.1　信号检测模型

在现实中，人们常常要根据观测数据（统称为观测信号）对其产生的原因做出判决。

- 根据雷达接收机所接收的信号判定某区域内目标是否存在

- 根据天气观测数据预测某地区次日的天气（晴、阴、雨、雪、雾等）



几个概念

- 假设：对检验对象的所有可能的判决结果的陈述。
- 假设检验：基于观测信号在几个假设中选取一个的判决。

- 先验知识：观测者事先具备的知识。
- 后验知识：对观测信号分析后重新形成的关于发送信号的知识。

雷达检测系统对应的二元假设检验模型

$$H_0: \quad x(t) = n(t)$$
$$H_1: \quad x(t) = s(t) + n(t) \qquad 0 \le t \le T$$

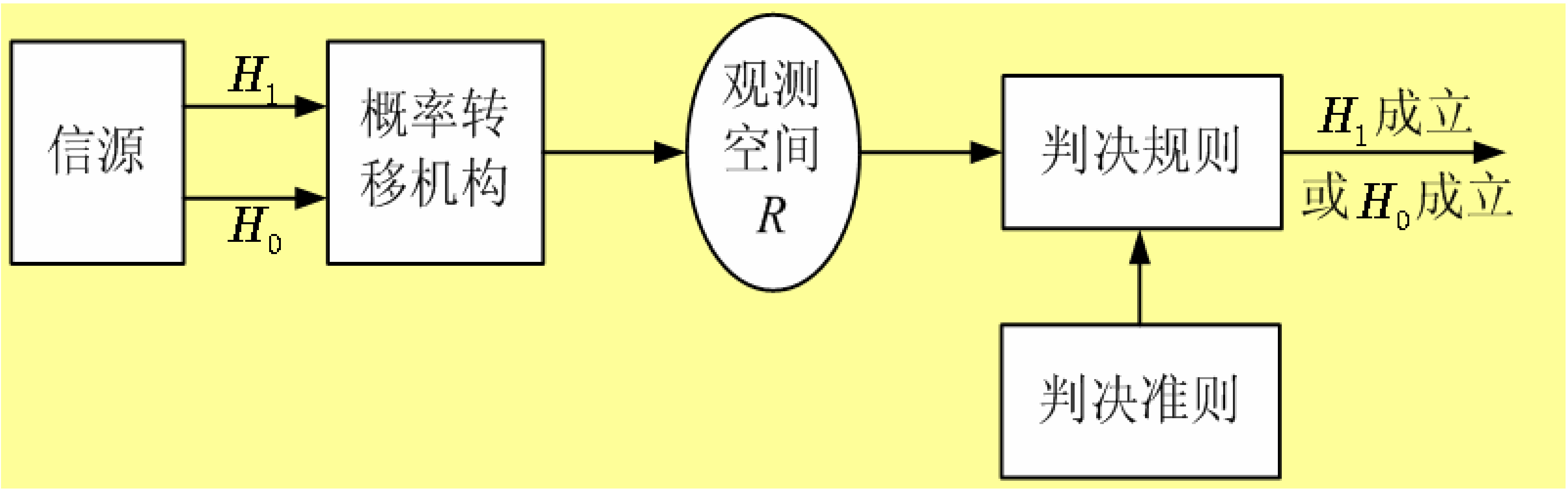
二元通信系统对应的二元假设检验模型

$$
\begin{aligned}
H_0:&\quad x(t)=s_0(t)+n(t)\\
H_1:&\quad x(t)=s_1(t)+n(t)
\end{aligned}
\qquad 0\le t\le T
$$

统计判决的基本步骤

- 做出合理假设
- 确定判决所要遵循的最佳准则
- 进行实验，获取判决所需的先验知识 $P(H_i), f(x|H_i)$
- 形成判决规则，划分判决域 R_i
- 设计最佳接收机，计算统计性能

二元的信号检测模型



分类

- 二元假设检验
  - 二元简单假设检验
  - 二元复合假设检验
- M 元假设检验
- 连续信号的检测
- 离散信号的检测
  - 单样本检测
  - 多样本检测

1.2　统计判决准则

1.2.1　几个基本概念

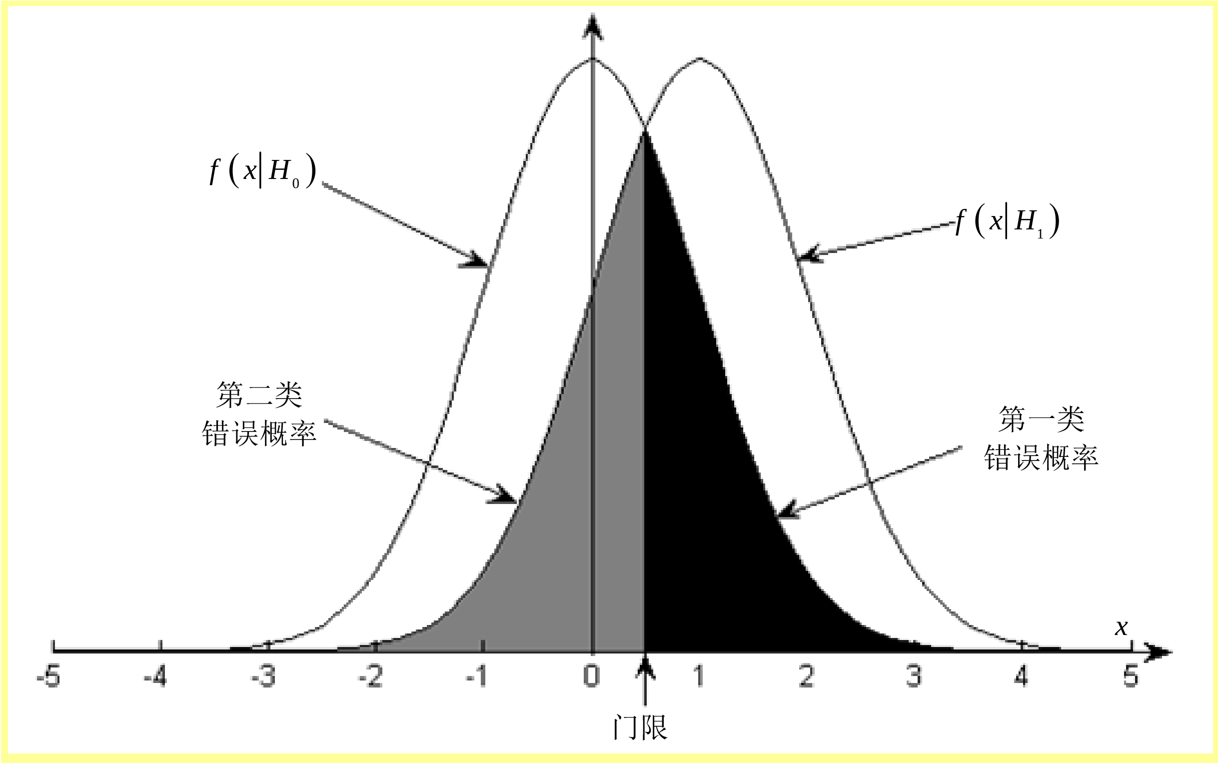
- $P(D_1|H_0)$（第一类错误判决概率，即虚警概率，用P_{fa} 或 α 表示）：H_0 为真但判决为 H_1 的概率
- $P(D_0|H_1)$（第二类错误判决概率，即漏警概率，用 β 表示）：H_1 为真但判决为 H_0 的概率
- $P(D_0|H_0)$：H_0 为真也判决为 H_0 的概率
- $P(D_1|H_1)$（检测概率，用 P_D 表示）：H_1 为真也判为 H_1 的概率
- 平均错误概率 $\overline{P}_e$

例：

目标回波信号 $s(t)=1$ ，噪声 $n(t)\sim N(0,1)$，利用单个观测样本进行检测。

$$
\begin{aligned}
H_0:&\quad x=n\\
H_1:&\quad x=1+n
\end{aligned}
$$

判决概率



1.2.2　　最大后验概率准则

二元假设检验模型　H_0： $x=-A+n$

H_1： $x=A+n$

- 根据观测样本，选择最可能产生这种观测样本的那个信号判断为信源输出的信号。

$$P(H_1 \mid x) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} P(H_0 \mid x)$$

- 相应的判决规则为

$$\lambda(x)=\frac{f(x|H_1)}{f(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)}{P(H_1)}=th$$

1.2.3　　最小错误概率准则

寻找合适的判决门限th'使二元假设检验的平均错误概率

$$\overline{P}_e = P(H_0)P(D_1|H_0)+P(H_1)P(D_0|H_1)$$

$$= P(H_0)\int_{th'}^{+\infty} f(x|H_0)dx + P(H_1)\int_{-\infty}^{th'} f(x|H_1)dx$$

达到最小。

即令 $\frac{d\overline{P}_e}{dth'}=0$ 　　得 $\frac{f(th'|H_1)}{f(th'|H_0)}=\frac{P(H_0)}{P(H_1)}$

相应的判决规则为

$$\lambda(x)=\frac{f(x|H_1)}{f(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)}{P(H_1)} = th$$

例

二元通信系统，其单样本的二元假设检验为

$$H_0: \quad x = -A + n$$
$$H_1: \quad x = A + n$$

其中 $A > 0$，噪声 $n \sim N\left(0, \sigma^2\right)$，$P\left(H_1\right) = P\left(H_0\right) = 1/2$

求基于最小错误概率准则进行判决的判决规则和最小错误概率。

1.2.4 贝叶斯准则

判决是需要付出代价的，引入代价函数 $C_{ij}\ \left(i, j=0,1\right)$

一般 $C_{10}\geq C_{00}$，$C_{01}\geq C_{11}$

则判决所付的平均代价为

$$\begin{aligned}\bar{C}=&P\left(H_0\right)\left[C_{00}P\left(D_0\middle|H_0\right)+C_{10}P\left(D_1\middle|H_0\right)\right]\\&+P\left(H_1\right)\left[C_{01}P\left(D_0\middle|H_1\right)+C_{11}P\left(D_1\middle|H_1\right)\right]\end{aligned}$$

目标：寻找合适的判决门限 th' ，使平均代价达到最小。

令 $\frac{d\bar{C}}{dth'}=0$ 解得 $\frac{f\left(th'\middle|H_1\right)}{f\left(th'\middle|H_0\right)}=\frac{P\left(H_0\right)\left(C_{10}-C_{00}\right)}{P\left(H_1\right)\left(C_{01}-C_{11}\right)}$

则判决规则为

$$\lambda\left(x\right)=\frac{f\left(x\middle|H_1\right)}{f\left(x\middle|H_0\right)}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\frac{P\left(H_0\right)\left(C_{10}-C_{00}\right)}{P\left(H_1\right)\left(C_{01}-C_{11}\right)}=th$$

另一种求解方法 $R=R_0\bigcup R_1$

1.2.5　极小极大准则

- 贝叶斯准则要求已知先验概率和各种代价函数；极小极大准则应用于仅仅知道代价函数 C_{ij} $(i, j=0,1)$ ，而先验概率 $P(H_i)$ $(i=0,1)$ 未知的情况。
- 极小极大准则：把使最小平均代价（贝叶斯代价）取得最大值所对应的概率当作先验概率使用。

设先验概率 $P(H_0)=p$，则贝叶斯判决规则为

$$\frac{f(x|H_1)}{f(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{p(C_{10}-C_{00})}{(1-p)(C_{01}-C_{11})}$$

贝叶斯代价为

$$\begin{aligned}\bar{C}_{\min}(p) &= p\left\{C_{00}\left[1-\alpha(p)\right]+C_{10}\alpha(p)\right\}+(1-p)\left\{C_{01}\beta(p)+C_{11}\left[1-\beta(p)\right]\right\} \\ &= C_{00}p+C_{11}(1-p)+(C_{10}-C_{00})\alpha(p)p+(C_{01}-C_{11})\beta(p)(1-p)\end{aligned}$$

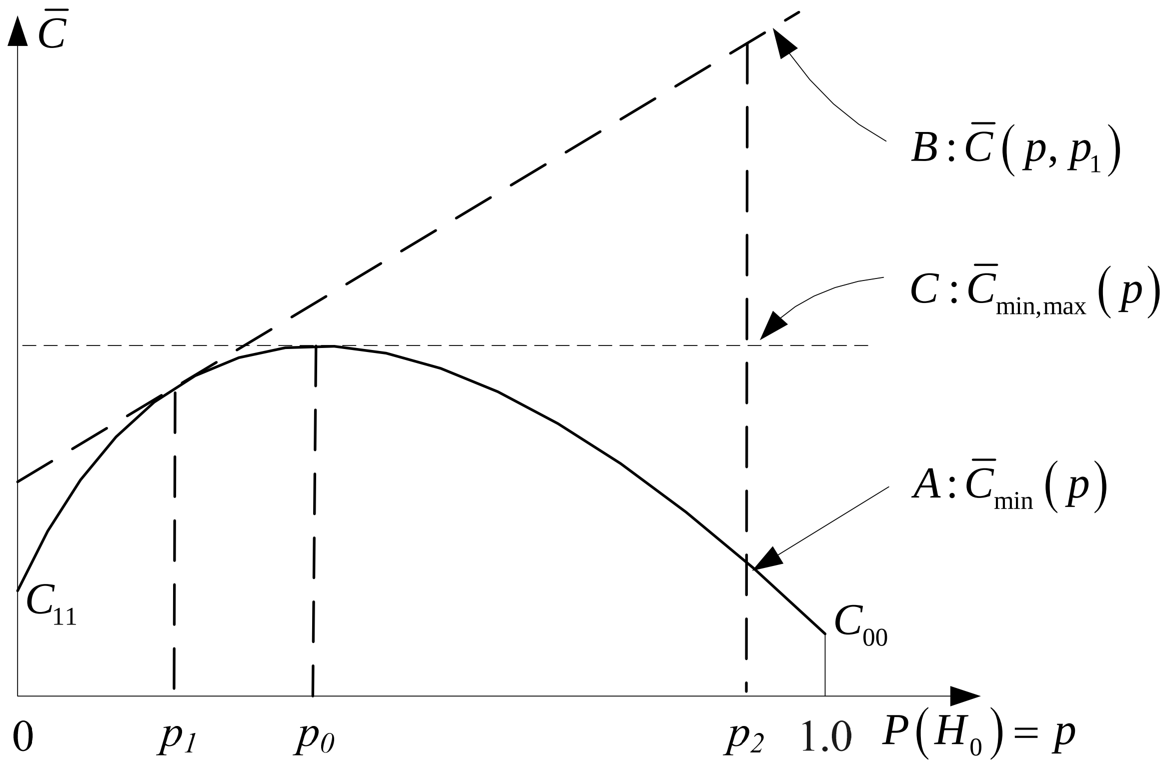
当先验概率 p 未知时，判决者按照推测的先验概率 $\left(p_1, 1-p_1\right)$ 来设计贝叶斯检验，判决规则为

$$\frac{f\left(x|H_1\right)}{f\left(x|H_0\right)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{p_1\left(C_{10}-C_{00}\right)}{\left(1-p_1\right)\left(C_{01}-C_{11}\right)}$$

此时判决所付的平均代价

$$\begin{aligned}\bar{C}\left(p, p_1\right) = C_{00}\, p + C_{11}\left(1-p\right) + \left(C_{10}-C_{00}\right)\alpha\left(p_1\right) p \\ + \left(C_{01}-C_{11}\right)\beta\left(p_1\right)\left(1-p\right)\end{aligned}$$

$\bar{C}_{\min}$ 以及 $\bar{C}(p, p_1)$ 与 p 的关系曲线



推测值 p_0 的求解

- 方法一　贝叶斯曲线 $\bar{C}_{\min}(p)$ 取极大值： $\left.\dfrac{d\bar{C}_{\min}(p)}{dp}\right|_{p=p_0}=0$

- 方法二　直线 $\bar{C}(p,p_1)$ 斜率等于零： $\left.\dfrac{\partial\bar{C}(p,p_1)}{\partial p}\right|_{p_1=p_0}=0$

得　$C_{10}\alpha(p_0)+C_{00}[1-\alpha(p_0)]=C_{01}\beta(p_0)+C_{11}[1-\beta(p_0)]$

（极小极大方程）

1.2.6 纽曼-皮尔逊准则

- 纽曼-皮尔逊准则是在先验概率和代价都难以确定的情况下处理假设检验问题的有效准则。
- 在保证虚警概率小于等于某一给定值 $\left(P_{fa} \le \alpha\right)$ 的约束条件下，使检测概率 P_D 最大。其表示形式为

$$\max P\left(D_1 \mid H_1\right) \qquad s.t.\ \ P\left(D_1 \mid H_0\right) = \alpha$$

采用拉格朗日待定系数法

$$\mathcal{L} = P\left(D_0 \middle| H_1\right) + \mu P\left(D_1 \middle| H_0\right)$$

类比平均代价，可得相应的判决规则：

$$\frac{f\left(x \middle| H_1\right)}{f\left(x \middle| H_0\right)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \mu = th$$

门限 th 由 $P_{fa} = \alpha$ 确定。

例

对于单样本的雷达检测问题，有

$$H_0: \quad x = n$$
$$H_1: \quad x = 1 + n$$

其中噪声 $n \sim N(0,1)$，给定虚警概率 α 。请求纽曼-皮尔逊准则的判决规则和检测概率。

1.2.7　似然比检验

前面几种准则下的判决规则都具有如下形式：

$$\lambda(x)=\frac{f\left(x\middle|H_1\right)}{f\left(x\middle|H_0\right)}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}th$$

其中判决门限由具体的判决准则来确定。

- 似然比 $\lambda(x)$
- 似然比检验 $\lambda(x)\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}th$
- 似然比检验的对数形式 $\ln\lambda(x)\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\ln th$
- 与门限作比较的变量称为检验统计量

几种判决准则的门限值 th

- 最大后验概率准则/最小错误概率准则：$th = P(H_0)/P(H_1)$

- 贝叶斯准则：$$th = \frac{P(H_0)(C_{10} - C_{00})}{P(H_1)(C_{01} - C_{11})}$$

- 极小极大准则：$$th = \frac{p_0(C_{10} - C_{00})}{(1 - p_0)(C_{01} - C_{11})}$$

- 纽曼–皮尔逊准则： th 由给定的虚警概率确定。

1.3 统计判决准则的推广

1.3.1 M元假设检验

1.3.2 多样本假设检验

1.3.3 复合假设检验

1.3.1 M元假设检验

M元假设下的贝叶斯检验

- M 种假设 $H_0, H_1, \cdots, H_{M-1}$，先验概率 $P(H_0), P(H_1), \cdots, P(H_{M-1})$

  代价函数 C_{ij} $(i, j = 0, 1, \cdots, M-1)$，则统计判决付出的平均代价为：

$$\bar{C} = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} C_{ij} P(D_i | H_j) P(H_j)$$

- M 元假设下的贝叶斯检验就是根据使平均风险最小的准则，将观测空间 $\mathbb{R}$ 划分为互斥的 $\mathbb{R}_i$ $(i = 0, 1, \cdots, M-1)$。
- 当 $x \in \mathbb{R}_i$，则判 H_i 为真。

得

$$\bar{C}=\sum_{i=0}^{M-1}P(H_i)C_{ii}+\sum_{i=0}^{M-1}\int_{x\in\mathbb{R}_i}\sum_{j=0,\,j\neq i}^{M-1}P(H_j)(C_{ij}-C_{jj})f(x|H_j)dx$$

定义

$$I_i(x)=\sum_{j=0,\,j\neq i}^{M-1}P(H_j)(C_{ij}-C_{jj})f(x|H_j)$$

则

$$\mathbb{R}_i=\{x:I_i(x)\leq I_j(x),\ j=0,1,\cdots,M-1,\ j\neq i\}$$

贝叶斯判决规则为

$$I_i(x)\overset{H_i}{\leq}I_j(x),\ j=0,1,\cdots,M-1,\ j\neq i$$

- 令 $C_{ii}=0, C_{ij}=1$，贝叶斯判决规则退化成最小错误概率准则或最大后验概率准则下的判决规则，即

$$P\left(H_i \middle| x\right) \overset{H_i}{\geq} P\left(H_j \middle| x\right), j=0,1,\cdots,M-1, j \neq i$$

- 可进一步表示成如下似然比判决形式：

$$\lambda\left(x\right)=\frac{f\left(x \middle| H_i\right)}{f\left(x \middle| H_j\right)} \overset{H_i}{\geq} \frac{P\left(H_j\right)}{P\left(H_i\right)}, j=0,1,\cdots,M-1, j \neq i$$

1.3.2 多样本假设检验

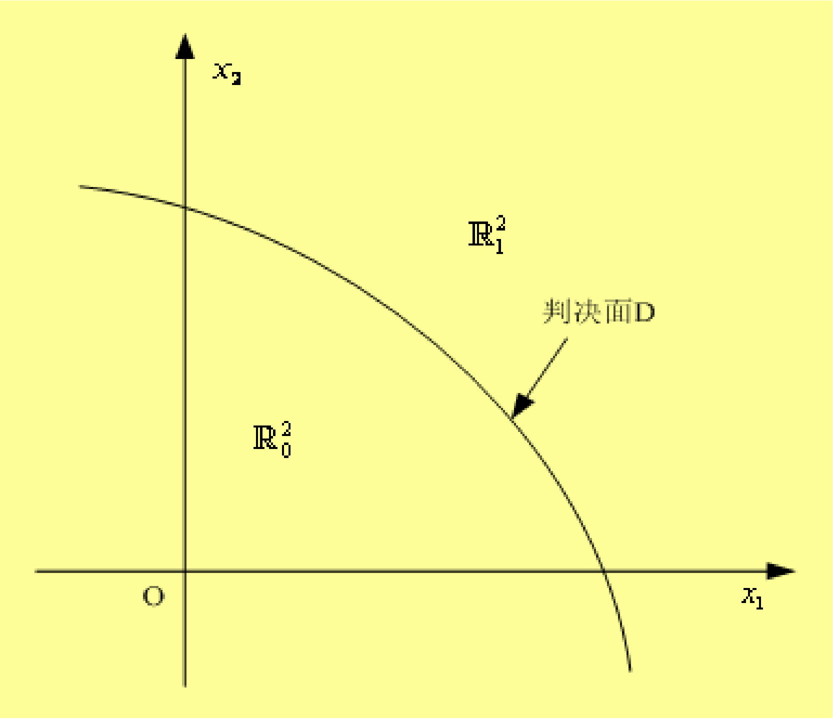
多样本假设检验模型

$$\begin{aligned} H_0 &: x_i = A_0 + n_i \\ H_1 &: x_i = A_1 + n_i \end{aligned} \qquad i = 1, 2, \cdots, N$$

- 记 $\mathbf{x} = \left[x_1, x_2, \cdots, x_N\right]^T$ 。贝叶斯判决的目标是将N维观测空间划分为互斥的$\mathbb{R}_0^N, \mathbb{R}_1^N$两个区域，使平均代价 $\bar{C}$ 达到最小。
- 相应的判决规则为

$$\lambda(\mathbf{x}) = \frac{f\left(\mathbf{x}|H_1\right)}{f\left(\mathbf{x}|H_0\right)} = \frac{f\left(x_1, x_2, \cdots x_N \middle| H_1\right)}{f\left(x_1, x_2, \cdots x_N \middle| H_0\right)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P\left(H_0\right)\left(C_{10} - C_{00}\right)}{P\left(H_1\right)\left(C_{01} - C_{11}\right)} = th$$

双样本检测下二维观测空间的判决域划分示意图



判决面的方程式为： $\lambda(\mathbf{x}) = th$

纽曼-皮尔逊准则 $\max P\left(D_1 \mid H_1\right) \quad s.t.\ P\left(D_1 \mid H_0\right)=\alpha$

即 $$\lambda(\mathbf{x})=\frac{f\left(\mathbf{x} \mid H_1\right)}{f\left(\mathbf{x} \mid H_0\right)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \mu=th$$

门限 th 由下式确定

$$P\left(D_1 \mid H_0\right)=\int_{th}^{+\infty} f\left(\lambda \mid H_0\right) d\lambda=\alpha$$

在N维观测空间中有一系列判决面可以满足虚警概率的约束条件，从众多的判决面中找出一个使检测概率达到最大值的判决面。

例

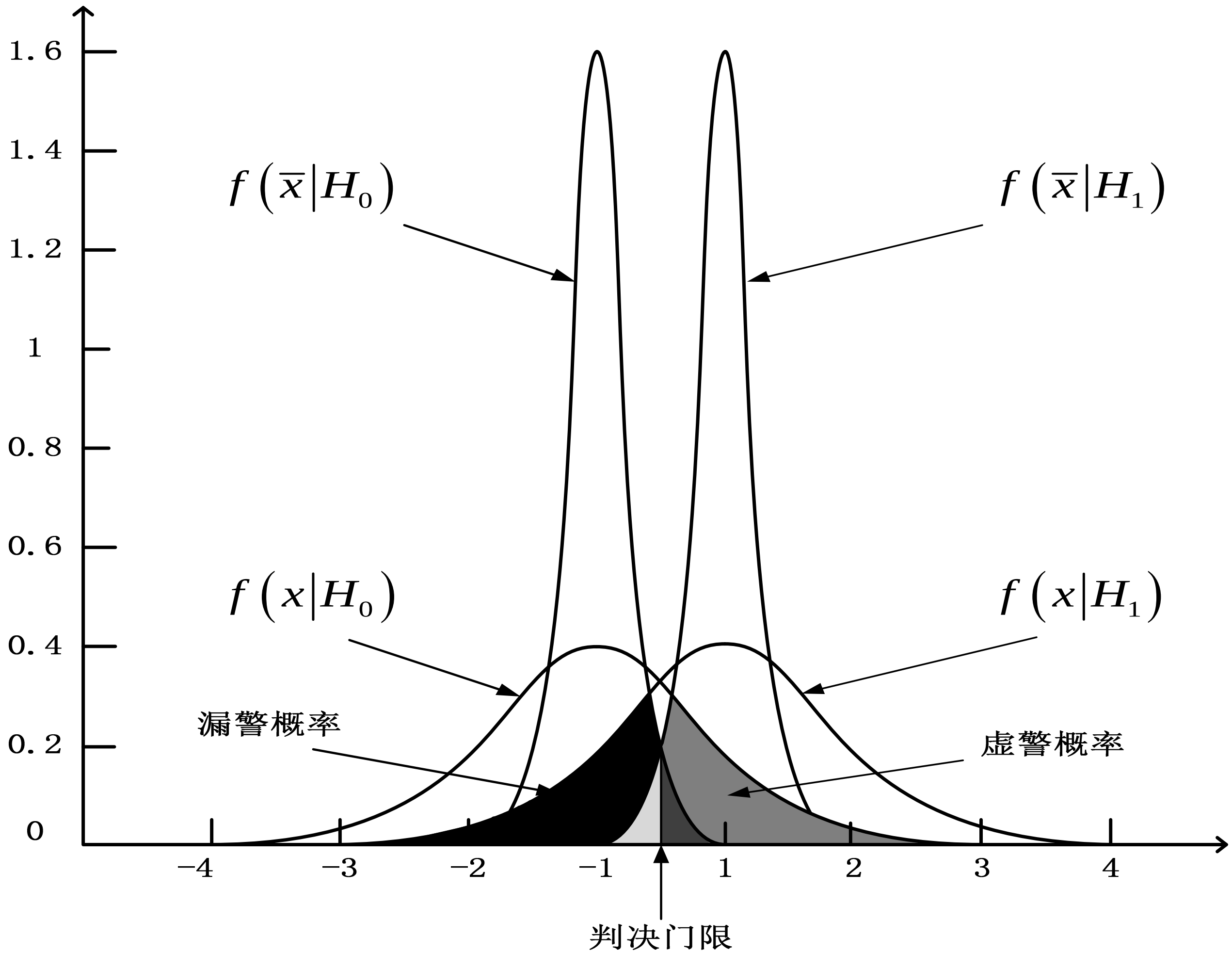
对于二元通信系统中的多样本检测问题，有

$$\begin{aligned} H_0: &\quad x_i = -A + n_i \\ H_1: &\quad x_i = A + n_i \end{aligned} \qquad i = 1, 2, \cdots, N$$

假定 $P(H_0) = P(H_1) = 1/2$，噪声 $n_i \sim N(0, \sigma^2)$ 且相互独立。请分析基于最小平均错误概率准则下的系统检测性能。

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 0$$

多样本与单样本下的性能比较



"累积"技术

例

对于4元多样本检测问题：

$$\begin{aligned} H_0:\ & x_i = -2 + n_i \\ H_1:\ & x_i = -1 + n_i \\ H_2:\ & x_i = 1 + n_i \\ H_3:\ & x_i = 2 + n_i \end{aligned} \qquad i = 1, 2, \cdots, N$$

其中 $n_i \sim N\left(0, \sigma^2\right)$ 且相互独立，各种假设出现的概率彼此相等。请分析基于最小平均错误概率准则下的系统检测性能。

1.3.3 复合假设检验

信号检测中除了由于噪声对观测样本的影响使判决产生了不确定性以外，被检测的信号的一些参量还可能是随机的，称为随机参量信号，对应的检测称为复合假设检验。

二元复合假设检验

与 H_0 假设有关的随机参量矢量为 $\mathbf{\Phi}=\left[\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_m\right]^T$，先验概率密度函数为 $f_0\left(\mathbf{\Phi}\right)$，先验概率为 $P\left(H_0\right)$，代价函数为$C_{00}\left(\mathbf{\Phi}\right),C_{10}\left(\mathbf{\Phi}\right)$

与 H_1 假设有关的随机参量矢量为 $\mathbf{\Theta}=\left[\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n\right]^T$，先验概率密度函数为$f_1\left(\mathbf{\Theta}\right)$，先验概率为 $P\left(H_1\right)$，代价函数为 $C_{11}\left(\mathbf{\Theta}\right),C_{01}\left(\mathbf{\Theta}\right)$

- 系统判决所付的平均代价：

$$\begin{aligned}
\bar{C} &= P(H_0)\int_{(\boldsymbol{\Phi})}\left[C_{00}(\boldsymbol{\Phi})P\left(D_0\middle|\boldsymbol{\Phi},H_0\right)+C_{10}(\boldsymbol{\Phi})P\left(D_1\middle|\boldsymbol{\Phi},H_0\right)\right]f_0(\boldsymbol{\Phi})d\boldsymbol{\Phi} \\
&\quad + P(H_1)\int_{(\boldsymbol{\Theta})}\left[C_{01}(\boldsymbol{\Theta})P\left(D_0\middle|\boldsymbol{\Theta},H_1\right)+C_{11}(\boldsymbol{\Theta})P\left(D_1\middle|\boldsymbol{\Theta},H_1\right)\right]f_1(\boldsymbol{\Theta})d\boldsymbol{\Theta} \\
&= P(H_0)\int_{(\boldsymbol{\Phi})}C_{00}(\boldsymbol{\Phi})f_0(\boldsymbol{\Phi})d\boldsymbol{\Phi}+P(H_1)\int_{(\boldsymbol{\Theta})}C_{01}(\boldsymbol{\Theta})f_1(\boldsymbol{\Theta})d\boldsymbol{\Theta} \\
&\quad + \int_{x\in R_1^N}\int_{(\boldsymbol{\Phi})}P(H_0)\left[C_{10}(\boldsymbol{\Phi})-C_{00}(\boldsymbol{\Phi})\right]f\left(\mathbf{x}\middle|\boldsymbol{\Phi},H_0\right)f_0(\boldsymbol{\Phi})d\boldsymbol{\Phi}dx \\
&\quad - \int_{x\in R_1^N}\int_{(\boldsymbol{\Theta})}P(H_1)\left[C_{01}(\boldsymbol{\Theta})-C_{11}(\boldsymbol{\Theta})\right]f\left(\mathbf{x}\middle|\boldsymbol{\Theta},H_1\right)f_1(\boldsymbol{\Theta})d\boldsymbol{\Theta}dx
\end{aligned}$$

基于贝叶斯准则的判决规则：

$$\lambda(\mathbf{x})=\frac{\int_{(\boldsymbol{\Theta})}\left[C_{01}(\boldsymbol{\Theta})-C_{11}(\boldsymbol{\Theta})\right]f\left(\mathbf{x}\middle|\boldsymbol{\Theta},H_1\right)f_1(\boldsymbol{\Theta})\,d\boldsymbol{\Theta}}{\int_{(\boldsymbol{\Phi})}\left[C_{10}(\boldsymbol{\Phi})-C_{00}(\boldsymbol{\Phi})\right]f\left(\mathbf{x}\middle|\boldsymbol{\Phi},H_0\right)f_0(\boldsymbol{\Phi})\,d\boldsymbol{\Phi}}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\frac{P(H_0)}{P(H_1)}=th$$

若各类代价函数 C_{ij} 与随机参量矢量 $\boldsymbol{\Phi}$ 和 $\boldsymbol{\Theta}$ 无关，则

$$\lambda(\mathbf{x})=\frac{\int_{(\boldsymbol{\Theta})}f\left(\mathbf{x}\middle|\boldsymbol{\Theta},H_1\right)f_1(\boldsymbol{\Theta})\,d\boldsymbol{\Theta}}{\int_{(\boldsymbol{\Phi})}f\left(\mathbf{x}\middle|\boldsymbol{\Phi},H_0\right)f_0(\boldsymbol{\Phi})\,d\boldsymbol{\Phi}}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\frac{(C_{10}-C_{00})P(H_0)}{(C_{01}-C_{11})P(H_1)}=th$$

似然比为平均似然比

1.4 高斯白噪声中已知信号的检测

1.4.1 最佳接收机

二元假设检验问题：

$$\begin{aligned} H_0 &: \ x(t) = s_0(t) + n(t) \\ H_1 &: \ x(t) = s_1(t) + n(t) \end{aligned} \qquad 0 \le t \le T$$

其中 $s_0(t)$ 和 $s_1(t)$ 是确知信号，$n(t)$ 是均值为零、功率谱密度为 $N_0/2$ 的高斯白噪声。在 $[0,T]$ 内对接收信号采样，获得N个观测样本：

$$\begin{aligned} H_0 &: x_k = s_{0k} + n_k \\ H_1 &: x_k = s_{1k} + n_k \end{aligned} \qquad k = 1, 2, \cdots, N$$

记 $\mathbf{x}=\left[x_1,x_2,\cdots,x_N\right]^T$，其似然比检验为

$$\lambda(\mathbf{x})=\frac{f\left(x_1,x_2,\cdots,x_N \mid H_1\right)}{f\left(x_1,x_2,\cdots,x_N \mid H_0\right)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} th$$

如果这N个样本统计独立，则

$$\lambda(\mathbf{x})=\frac{\prod_{k=1}^{N} f\left(x_k \mid H_1\right)}{\prod_{k=1}^{N} f\left(x_k \mid H_0\right)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} th$$

当假设为 $H_i\left(i=0,1\right)$ 时，样本 x_k 的似然函数为：

$$f\left(x_k \middle| H_i\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n}\exp\left[-\frac{\left(x_k-s_{ik}\right)^2}{2\sigma_n^2}\right]$$

此时样本矢量的似然函数为：

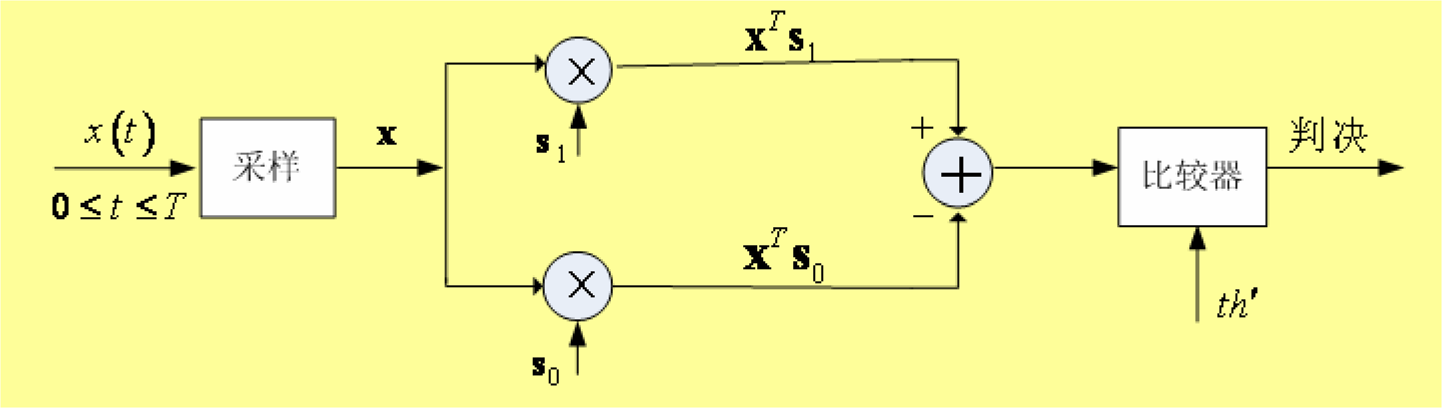
$$f\left(\mathbf{x} \middle| H_i\right)=\prod_{k=1}^{N} f\left(x_k \middle| H_i\right)=\left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{N/2}\exp\left[-\sum_{k=1}^{N}\frac{\left(x_k-s_{ik}\right)^2}{2\sigma_n^2}\right]$$

似然比判决规则为：

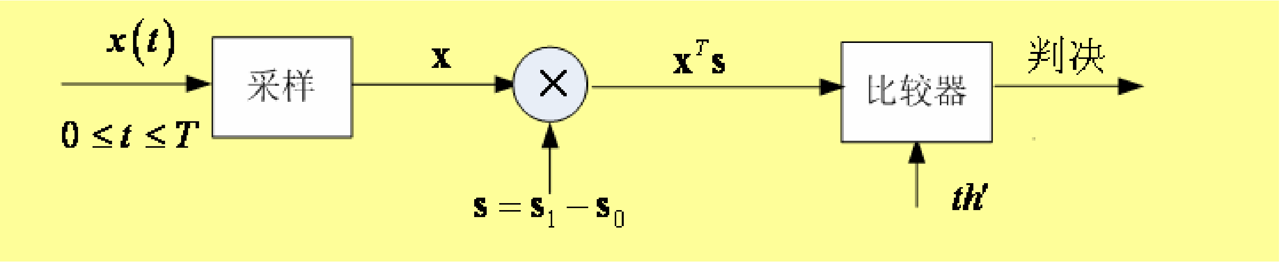
$$\mathbf{x}^T\left(\mathbf{s}_1-\mathbf{s}_0\right)\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\sigma_n^2\ln\left(th\right)+\frac{1}{2}\left(\mathbf{s}_1^T\mathbf{s}_1-\mathbf{s}_0^T\mathbf{s}_0\right)=th'$$

其中 $\mathbf{s}_1=\left[s_{11},s_{12},\cdots,s_{1N}\right]^T,\mathbf{s}_0=\left[s_{01},s_{02},\cdots,s_{0N}\right]^T$

相关接收机


$x(t)$
$0 \le t \le T$
采样
$\mathbf{x}$
$\mathbf{s}_1$
$\mathbf{s}_0$
$\mathbf{x}^T\mathbf{s}_1$
$\mathbf{x}^T\mathbf{s}_0$
+
−
比较器
判决
th'

(a)


$x(t)$
$0 \le t \le T$
采样
$\mathbf{x}$
$\mathbf{x}^T\mathbf{s}$
$\mathbf{s} = \mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_0$
比较器
判决
th'

(b)

适合于连续信号检测的最佳接收机

在 H_i 假设下的似然函数

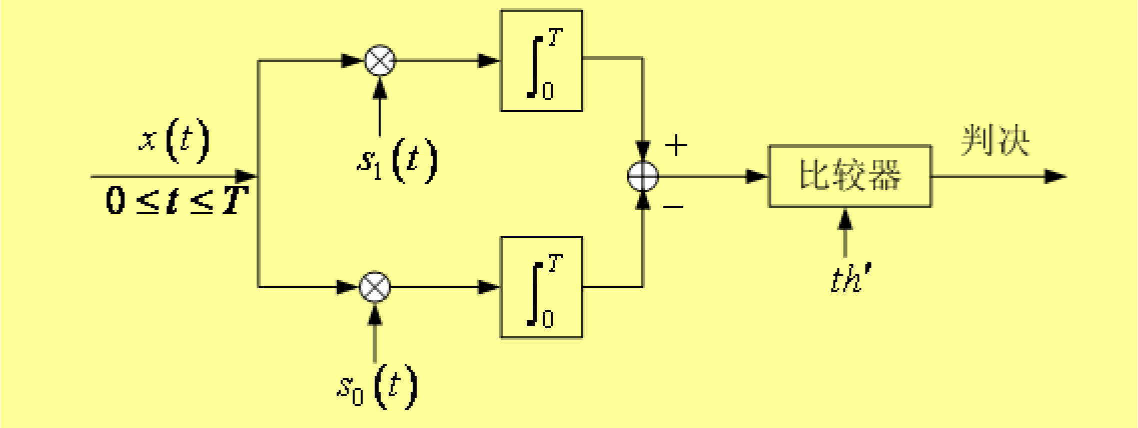
$$f\left(x(t)\middle|H_i\right)=F\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T\left[x(t)-s_i(t)\right]^2dt\right\}$$

连续信号的似然比判决规则

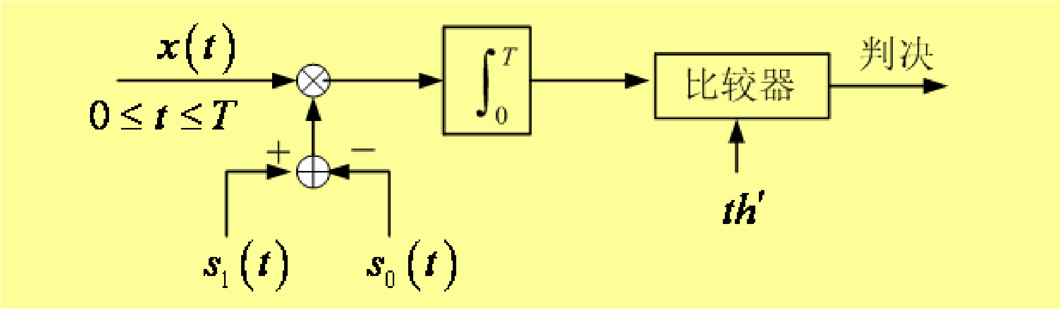
$$\int_0^T\left[s_1(t)-s_0(t)\right]x(t)\,dt\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}th'$$

其中 $th'=\frac{N_0}{2}\ln th+\frac{1}{2}\int_0^T\left[s_1^2(t)-s_0^2(t)\right]dt$

相关接收机


$x(t)$
$0 \le t \le T$
$s_1(t)$
$s_0(t)$
$\int_0^T$
$\int_0^T$
+
−
比较器
判决
th'

（a）


$x(t)$
$0 \le t \le T$
$\int_0^T$
比较器
判决
+
−
th'
$s_1(t)$
$s_0(t)$

（b）

1.4.2 通信接收机的性能

- 通信接收机性能通常用平均错误概率来衡量，设计检验统计量

$$G=\int_0^T\left[s_1(t)-s_0(t)\right]x(t)dt+\frac{1}{2}\int_0^T\left[s_0^2(t)-s_1^2(t)\right]dt \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{N_0}{2}\ln\left[\frac{P(H_0)}{P(H_1)}\right]$$

- H_0假设下

$$E\{G|H_0\}=-\frac{1}{2}\int_0^T\left[s_0(t)-s_1(t)\right]^2dt,\quad Var\{G|H_0\}=\frac{N_0}{2}\int_0^T\left[s_0(t)-s_1(t)\right]^2dt$$

- H_1假设下

$$E\{G|H_1\}=\frac{1}{2}\int_0^T\left[s_0(t)-s_1(t)\right]^2dt,\quad Var\{G|H_1\}=Var\{G|H_0\}$$

定义参数：

$$E=\frac{1}{2}\left(E_0+E_1\right)=\frac{1}{2}\left[\int_0^T s_0^2(t)\,dt+\int_0^T s_1^2(t)\,dt\right]$$

E_0 和 E_1 分别表示信号 $s_0(t)$ 和 $s_1(t)$的能量，E 表示信号 $s_0(t)$ 和 $s_1(t)$ 的平均能量；

$$\rho=\frac{1}{E}\int_0^T s_0(t)\,s_1(t)\,dt$$

ρ 表示 $s_0(t)$和 $s_1(t)$的时间互相关系数。

可证明：$|\rho|\le 1$

假定通信源的先验概率近似相等，即 $P(H_0)=P(H_1)=\frac{1}{2}$ ，

则二元通信系统的平均错误概率为：

$$\overline{P}_e=\int_{\sqrt{(1-\rho)E/N_0}}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx=1-\Phi\left(\sqrt{(1-\rho)E/N_0}\right)$$

最佳二元通信系统

相干相移键控系统（CPSK）

- 在 $[0,T]$ 内可能发射信号

$$\begin{aligned} s_0(t) &= A\sin\omega_c t \\ s_1(t) &= A\sin(\omega_c t+\pi) = -A\sin\omega_c t \end{aligned} \qquad 0 \le t \le T$$

- 判决规则

$$\int_0^T x(t)s_1(t)\,dt \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 0$$

- 平均错误概率

$$\overline{P}_e = 1-\Phi\left(\sqrt{2E/N_0}\right) = 1-\Phi\left(\sqrt{2E_1/N_0}\right)$$

相干频移键控系统（CFSK）

- 在$[0,T]$内可能发射信号

$$s_0(t)=A\sin\omega_0 t$$
$$s_1(t)=A\sin\omega_1 t \qquad 0\le t\le T$$

- 判决规则

$$\int_0^T\left[s_1(t)-s_0(t)\right]x(t)\,dt \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 0$$

- 平均错误概率

$$\overline{P}_e=1-\Phi\left(\sqrt{E/N_0}\right)=1-\Phi\left(\sqrt{E_1/N_0}\right)$$

开关载波键控系统（OOK）

- 在 $[0,T]$ 内可能发射信号

$$s_0(t)=0 \qquad 0\le t\le T$$
$$s_1(t)=B\sin\omega_c t$$

- 判决规则

$$\int_0^T x(t)s_1(t)\,dt \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{1}{2}E_1$$

- 平均错误概率

$$\overline{P}_e=1-\Phi\left(\sqrt{E/N_0}\right)=1-\Phi\left(\sqrt{E_1/2N_0}\right)$$

1.4.3 雷达系统的最佳接收机性能

两种假设

$$\begin{aligned} H_0: &\quad x(t)=n(t) \\ H_1: &\quad x(t)=s(t)+n(t) \end{aligned} \qquad 0\le t\le T$$

其中 $n(t)$ 是零均值，功率谱密度为 $N_0/2$ 的高斯白噪声。

- 判决规则

$$\int_0^T s(t)x(t)dt \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} th'$$

其中

$$th'=\frac{N_0}{2}\ln th+\frac{1}{2}\int_0^T s^2(t)dt$$

- 虚警概率

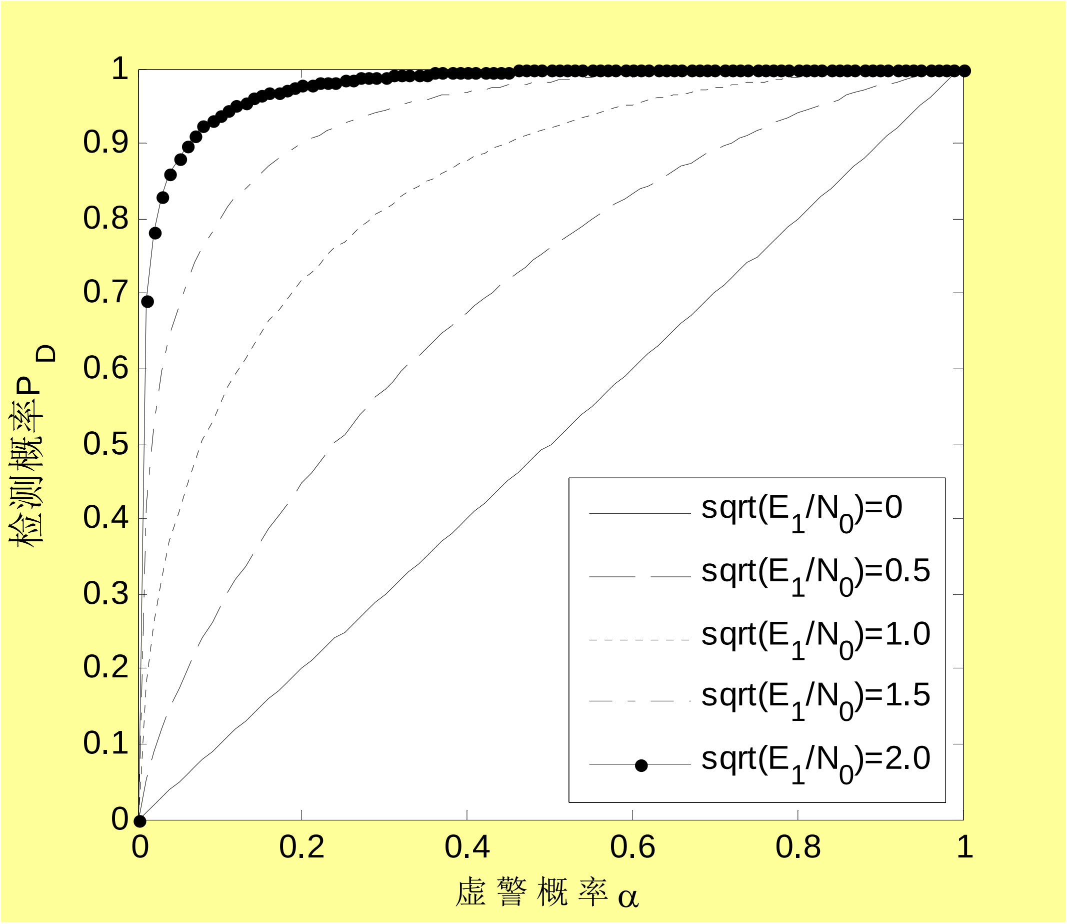
$$P_{fa}=\int_{\eta}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx=1-\Phi(\eta)=\alpha$$

- 检测概率

$$P_D=\int_{\eta-\sqrt{2E_1/N_0}}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx=1-\Phi\left(\eta-\sqrt{2E_1/N_0}\right)$$

- 检测概率与各参量间关系

接收机工作特性（ROC）


1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
检测概率P_D
虚警概率α
sqrt(E_1/N_0)=0
sqrt(E_1/N_0)=0.5
sqrt(E_1/N_0)=1.0
sqrt(E_1/N_0)=1.5
sqrt(E_1/N_0)=2.0

1.4.4 匹配滤波器

- 匹配滤波器是基于最大输出信噪比准则的最佳接收机
- 最大输出信噪比准则就是输出信号峰值的瞬时功率与噪声的平均功率之比为最大的准则
- 线性滤波器的输入输出模型

输入： $x(t)=s(t)+n(t)$

输出： $y(t)=s_o(t)+n_o(t)$

其中 $s(t)$ 是确知信号，$n(t)$ 是功率谱密度为 $N_0/2$ 的广义平稳白噪声。

定义系统输出的峰值信噪比为

$$SNR_o = \frac{s_o^2(t_0)}{E\left\{n_o^2(t)\right\}} = \frac{\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) H(j\omega) e^{j\omega t_0} d\omega\right|^2}{\frac{N_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|H(j\omega)\right|^2 d\omega}$$

利用施瓦兹不等式

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} F(t) Q(t) dt\right|^2 \le \int_{-\infty}^{+\infty} \left|F(t)\right|^2 dt \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left|Q(t)\right|^2 dt$$

（只有当 $F(t) = CQ^*(t)$，C为任意常数，上式等式才成立）

可得信噪比

$$SNR_o \le \frac{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|S(\omega)\right|^2 d\omega}{N_0/2} = \frac{E}{N_0/2} = \frac{2E}{N_0}$$

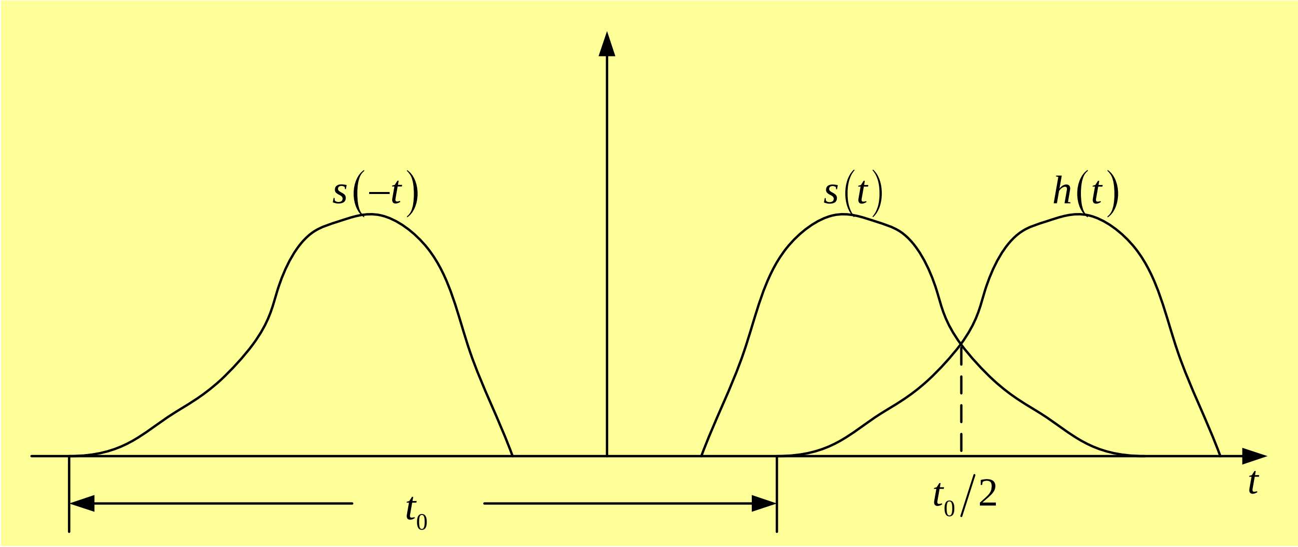
当系统传输函数为： $H(j\omega) = CS^*(\omega)e^{-j\omega t_o}$ 取 $C = 1$

系统输出达到最大信噪比： $\frac{E}{N_0/2}$

匹配滤波器的时域特性

$$h(t)=\mathcal{F}^{-1}\{H(j\omega)\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S^*(\omega)e^{j\omega(t-t_0)}d\omega=s^*(t_0-t)$$

- 对于实信号 $s(t)$，有 $h(t)=s(t_0-t)$



性质

- 在所有的线性滤波器中，匹配滤波器输出信噪比最大，

  $SNR_{o\max} = E/(N_0/2)$。

- $$\begin{cases} |H(j\omega)| = |S(\omega)| \\ \varphi_h(\omega) = -\varphi_s(\omega) - \omega t_0 \end{cases}$$
- 输出信噪比达到最大的时刻 $t_0 \geq T$
- 与 $s(t)$ 匹配的滤波器对 $s_1(t) = As(t-\tau)$ 同样匹配
- 匹配滤波器对频移信号不再匹配
- 匹配滤波器的输出信号是输入信号的时间自相关函数
- 匹配滤波器和相关器的等效性

1.4.5 *M*元通信系统

- *M*元假设检验问题

$$H_i: x(t)=s_i(t)+n(t),\ 0\le t\le T,\ i=0,1,\cdots,M-1$$

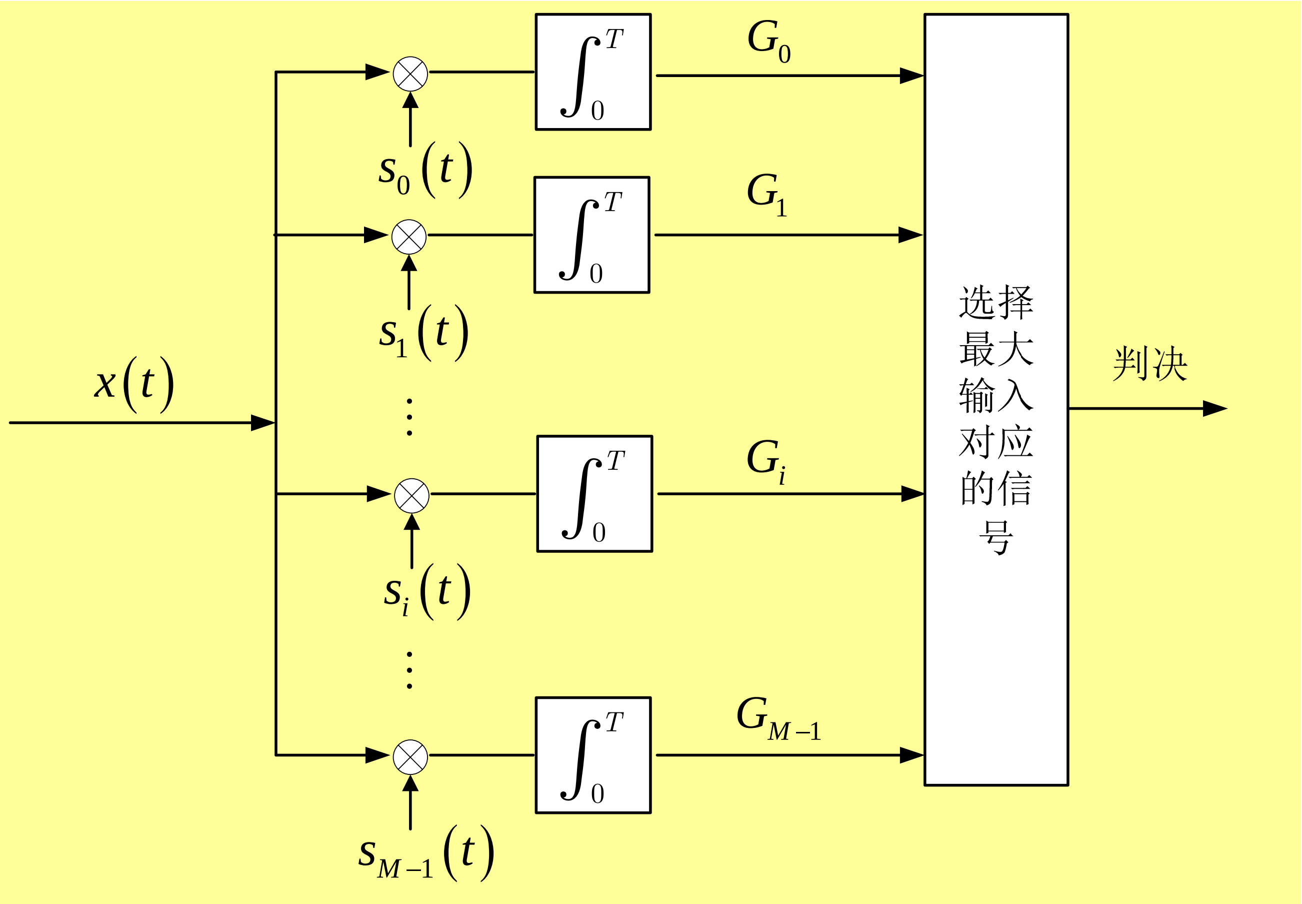
其中 $n(t)$ 是均值为0、功率谱密度为 $N_0/2$ 的高斯白噪声

$$\rho_{ij}=\int_0^T s_i(t)s_j(t)dt=\delta_{ij}\cdot E \qquad \delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\ne j\end{cases}$$

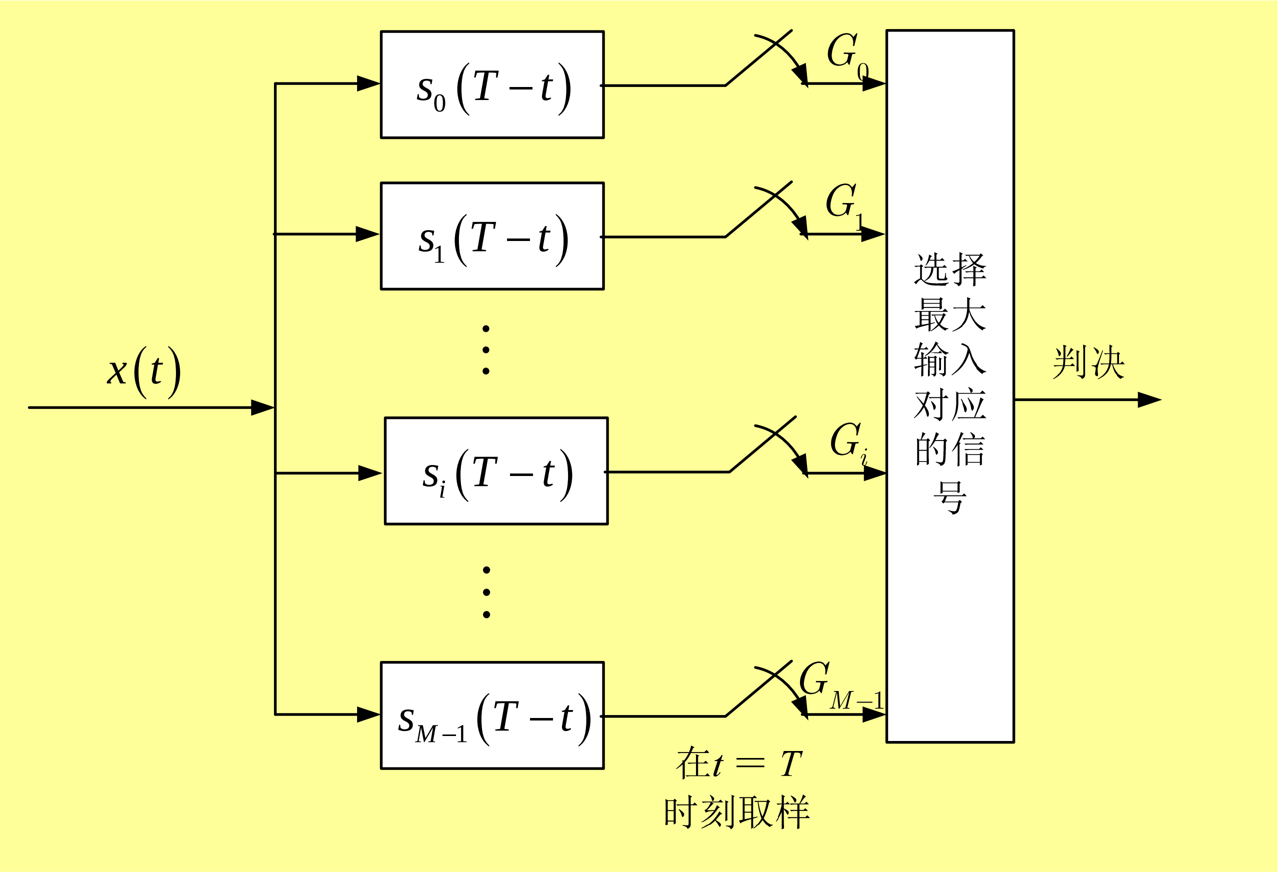
- 基于最小错误概率准则的判决规则为

$$\int_0^T s_i(t)x(t)dt \overset{H_i}{\ge} \int_0^T s_j(t)x(t)dt,\ j=0,1,\cdots,M-1,\ j\ne i$$

相关接收机



匹配滤波器



M元系统的检测性能

- 以第i个相关器输出作为检验统计量

$$G_i = \int_0^T x(t) s_i(t) dt, \ i = 0,1,\cdots,M-1$$

- 推导得平均错误概率为：

$$\overline{P}_e = \sum_{j=0}^{M-1} P_e(H_j) P(H_j) = 1 - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \left(\int_{-\infty}^{z+\sqrt{2E/N_0}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \right)^{M-1} dz$$

- 平均错误概率与各参量间关系

1.4.6　已知信号的分集接收

利用分集技术可以改善信号检测的性能

- 时间分集
- 频率分集
- 空间分集
- 极化分集

考虑一个多站雷达系统，M部特性一致的雷达接收机在观察时间T内接收信号，记为 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_M(t)$，对应的二元假设检验问题为：

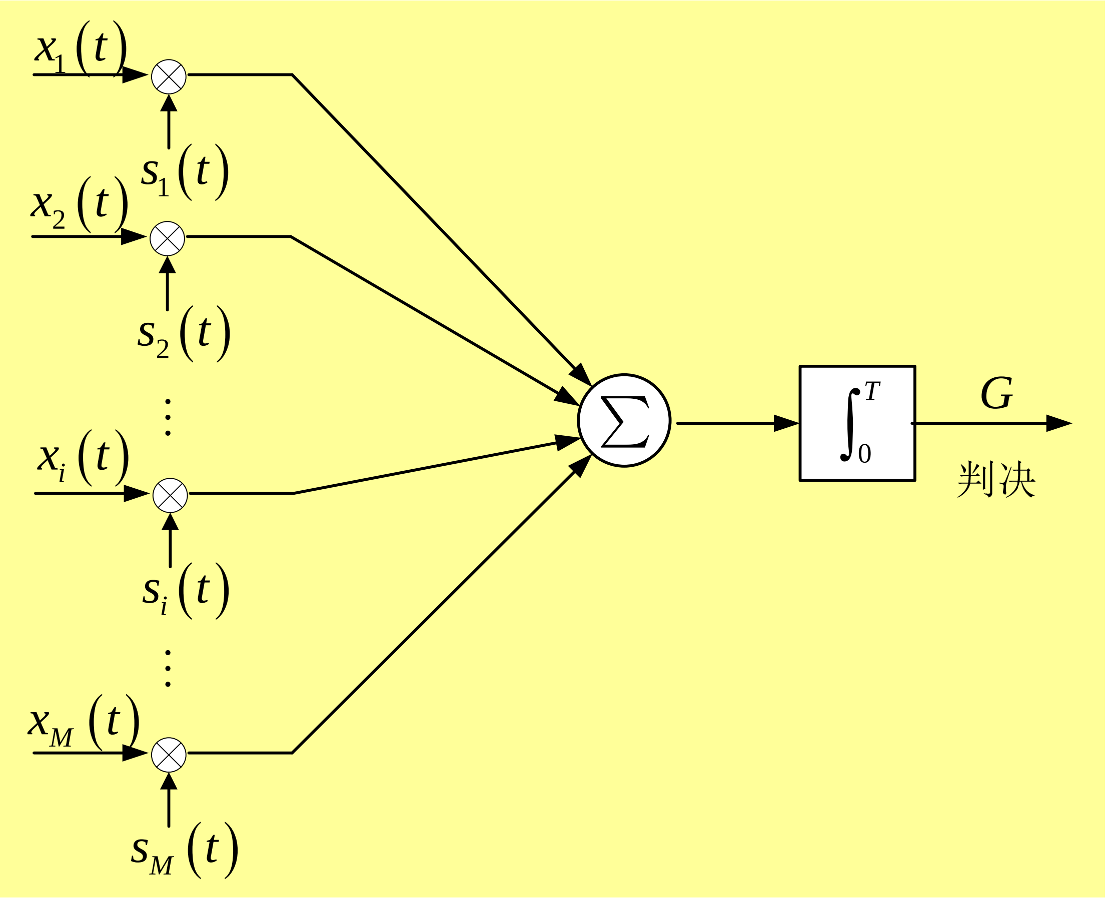
$$\begin{aligned} H_1 &: x_i(t) = s_i(t) + n_i(t) \\ H_0 &: x_i(t) = n_i(t) \end{aligned} \qquad 0 \le t \le T, \qquad i = 1, 2, \cdots, M$$

- 似然比判决规则为

$$\sum_{i=1}^{M} \int_0^T x_i(t) s_i(t) dt \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} th'$$

其中 $th' = \frac{N_0}{2} \ln th + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{M} E_i$ 。

相关接收机



- 选择检验统计量为

$$G=\sum_{i=1}^{M}\int_0^T x_i(t)s_i(t)dt$$

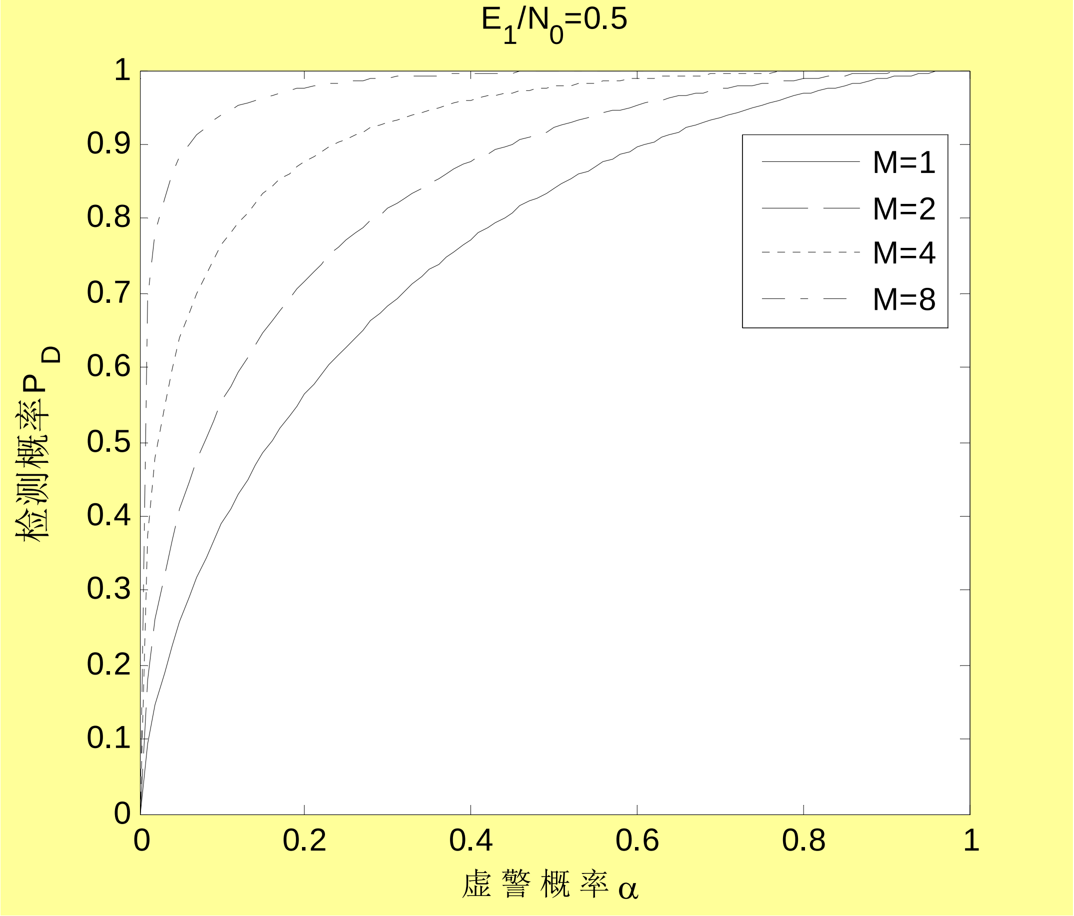
- 虚警概率和检测概率分别为：

$$P_{fa}=\int_{\eta}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx=1-\Phi(\eta)$$

$$P_D=\int_{\eta-\sqrt{2E_T/N_0}}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx=1-\Phi\left(\eta-\sqrt{2E_T/N_0}\right)$$

其中 $\eta=th'\sqrt{2/N_0E_T}$

接收机工作特性（ROC）


E_1/N_0=0.5
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
M=1
M=2
M=4
M=8
检测概率P_D
虚 警 概 率 α

1.5　估计准则

1.5.1 最大后验概率估计

1.5.2 最大似然估计

1.5.3 最小均方误差估计

1.5.4 线性最小均方误差估计

1.5.5 最小平均绝对误差估计

1.5.6 贝叶斯估计

1.5.7 最小二乘估计

观测信号：

$$x(t)=s(t;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_M)+n(t)\quad 0\le t\le T$$

其中$s(t;\theta_1,\theta_2,\cdots\theta_M)$为有用信号，$\boldsymbol{\theta}=[\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_M]^T$为待估计参量，$n(t)$ 为观测噪声。利用N个观测样本

$\mathbf{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_N]^T$ 进行估计。

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}=g(\mathbf{x})$$

1.5.1 最大后验概率估计

使后验概率密度最大的一种估计，即

$$\hat{\theta}_{MAP} = \arg\max_{\theta} f(\theta \mid \mathbf{x})$$

其中 $f(\theta \mid \mathbf{x})$ 为单个待估计量 θ 的后验概率密度函数。

估计量 $\hat{\theta}_{MAP}$ 如下可得

$$\left[\frac{\partial}{\partial\theta} f(\theta \mid \mathbf{x})\right]\Bigg|_{\theta=\hat{\theta}_{MAP}} = 0 \quad or \quad \left[\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f(\theta \mid \mathbf{x})\right]\Bigg|_{\theta=\hat{\theta}_{MAP}} = 0$$

利用

$$f(\theta\,|\,\mathbf{x})=\frac{f(\mathbf{x}\,|\,\theta)\,f(\theta)}{f(\mathbf{x})}$$

进一步可得

$$\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(\mathbf{x}\,|\,\theta)+\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(\theta)\right]\Bigg|_{\theta=\hat{\theta}_{MAP}}=0$$

例： 已知如下观测样本

$$x_i = s + n_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, N$$

其中信号 $s \sim N\left(0, \sigma_s^2\right)$，噪声 $n_i \sim N\left(0, \sigma_n^2\right)$ 独立同分布，

并且信号与噪声不相关。求 $\hat{s}_{MAP}$

1.5.2 最大似然估计

使观测样本的似然函数 $f(\mathbf{x}|\theta)$ 取得最大值的一种估计，即

$$\hat{\theta}_{ML} = \arg\max_{\theta} f(\mathbf{x}|\theta)$$

估计量 $\hat{\theta}_{ML}$ 如下可得

$$\frac{\partial}{\partial\theta} f(\mathbf{x}|\theta)\bigg|_{\theta=\hat{\theta}_{ML}} = 0 \quad or \quad \frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(\mathbf{x}|\theta)\bigg|_{\theta=\hat{\theta}_{ML}} = 0$$

- 适用于确定参量估计和先验分布未知的随机参量估计。

例： 已知如下观测样本

$$x_i = s + n_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, N$$

其中信号 $s \sim N\left(0, \sigma_s^2\right)$，噪声 $n_i \sim N\left(0, \sigma_n^2\right)$ 独立同分布，

并且信号与噪声不相关。求 $\hat{s}_{ML}$

1.5.3 最小均方误差估计

使估计的均方误差最小的一种估计。

定义估计误差 $e\left(\hat{\theta}\right)=\theta-\hat{\theta}$

估计的均方误差

$$\xi\left(\hat{\theta}\right)=E\left\{e^{2}\left(\hat{\theta}\right)\right\}=\int_{(\theta)}\int_{(\mathbf{x})}\left(\theta-\hat{\theta}\right)^{2}f\left(\theta,\mathbf{x}\right)d\mathbf{x}d\theta=\int_{(\mathbf{x})}\xi\left(\hat{\theta}\mid\mathbf{x}\right)f\left(\mathbf{x}\right)d\mathbf{x}$$

则 $$\hat{\theta}_{MS}=\arg\min_{\hat{\theta}}\xi\left(\hat{\theta}\right)=\arg\min_{\hat{\theta}}\xi\left(\hat{\theta}\mid\mathbf{x}\right)$$

利用

$$\frac{\partial}{\partial\hat{\theta}}\xi(\hat{\theta}\,|\,\mathbf{x})\Big|_{\hat{\theta}=\hat{\theta}_{MS}}=0$$

可得

$$\hat{\theta}_{MS}=\int_{(\theta)}\theta f\left(\theta\,|\,\mathbf{x}\right)\mathrm{d}\theta=E\left\{\theta\,|\,\mathbf{x}\right\}$$

例： 已知如下观测样本

$$x_i = s + n_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, N$$

其中信号 $s \sim N\left(0, \sigma_s^2\right)$，噪声 $n_i \sim N\left(0, \sigma_n^2\right)$ 独立同分布，

并且信号与噪声不相关。求 $\hat{s}_{MS}$

1.5.4 线性最小均方误差估计

最小均方误差估计的一种特例，要求估计量与观测样本之间必须满足线性关系，即：

$$\hat{\theta} = g(\mathbf{x}) = a + \sum_{k=1}^{N} b_k x_k = a + \mathbf{b}^T \mathbf{x}$$

其中 a 和 $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \cdots, b_N]^T$ 是待定系数，根据最小均方误差准则确定。估计的均方误差为

$$\xi(\hat{\theta}) = E\left\{\left[\theta - \left(a + \sum_{k=1}^{N} b_k x_k\right)\right]^2\right\}$$

则

$$\frac{\partial}{\partial a}E\left\{\xi\left(\hat{\theta}\right)\right\}=E\left\{-2\left(\theta-a_L-\sum_{k=1}^{N}b_k x_k\right)\right\}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial b_k}E\left\{\xi\left(\hat{\theta}\right)\right\}=-2E\left\{\left(\theta-a_L-\sum_{k=1}^{N}b_k x_k\right)x_k\right\}=0$$

求解得

$$a_L=E\{\theta\}-Cov\{\theta,\mathbf{x}\}Cov^{-1}\{\mathbf{x},\mathbf{x}\}E\{\mathbf{x}\}$$

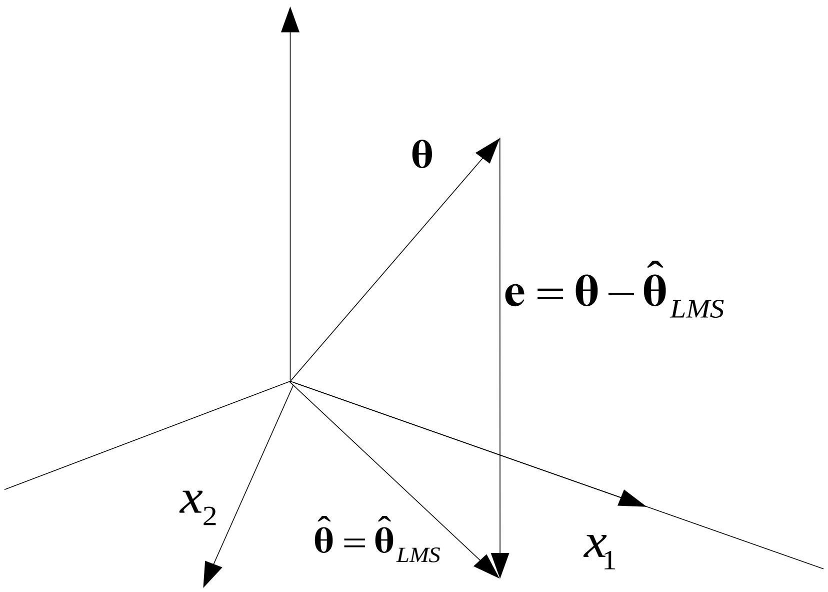
$$\mathbf{b}_L^T=Cov\{\theta,\mathbf{x}\}Cov^{-1}\{\mathbf{x},\mathbf{x}\}$$

即

$$\hat{\theta}_{LMS}=a_L+\mathbf{b}_L^T\mathbf{x}=E\{\theta\}+Cov\{\theta,\mathbf{x}\}Cov^{-1}\{\mathbf{x},\mathbf{x}\}\left[\mathbf{x}-E\{\mathbf{x}\}\right]$$

正交条件：线性最小均方误差估计的估计误差与观测样本是正交的

$$E\left\{\left(\theta-\hat{\theta}_{LMS}\right)\mathbf{x}^T\right\}=0$$



例： 已知如下观测样本

$$x_i = s + n_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, N$$

其中信号 $s \sim N\left(0, \sigma_s^2\right)$， 噪声 $n_i \sim N\left(0, \sigma_n^2\right)$ 独立同分布，

并且信号与噪声不相关。 求 $\hat{s}_{LMS}$

1.5.5 最小平均绝对误差估计

使绝对估计误差的统计平均值最小的一种估计。

定义绝对估计误差

$$e_{ABS}\left(\hat{\theta}\right)=\left|\theta-\hat{\theta}\right|$$

其统计平均绝对误差

$$\xi_{ABS}\left(\hat{\theta}\right)=\int_{(\theta)}\int_{(\mathbf{x})}\left|\theta-\hat{\theta}\right| f\left(\theta,\mathbf{x}\right)d\mathbf{x}d\theta=\int_{(\mathbf{x})}\left[\int_{(\theta)}\left|\theta-\hat{\theta}\right| f\left(\theta\middle|\mathbf{x}\right)d\theta\right]f\left(\mathbf{x}\right)d\mathbf{x}$$

$$=\int_{(\mathbf{x})}\xi_{ABS}\left(\hat{\theta}\middle|\mathbf{x}\right)f\left(\mathbf{x}\right)d\mathbf{x}$$

则 $$\hat{\theta}_{ABS} = \arg\min_{\hat{\theta}} \xi_{ABS}\left(\hat{\theta}\right) = \arg\min_{\hat{\theta}} \xi_{ABS}\left(\hat{\theta} \mid \mathbf{x}\right)$$

即 $$\left.\frac{\partial}{\partial\hat{\theta}} \xi_{ABS}\left(\hat{\theta}\middle|\mathbf{x}\right)\right|_{\hat{\theta}=\hat{\theta}_{ABS}} = 0$$

解得

$$\int_{-\infty}^{\hat{\theta}_{ABS}} f\left(\theta\middle|\mathbf{x}\right) d\theta = \int_{\hat{\theta}_{ABS}}^{+\infty} f\left(\theta\middle|\mathbf{x}\right) d\theta$$

可见,$\hat{\theta}_{ABS}$ 是条件概率密度的中位数，故又称作条件中位数估计。

例： 已知如下观测样本

$$x_i = s + n_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, N$$

其中信号 $s \sim N\left(0, \sigma_s^2\right)$，噪声 $n_i \sim N\left(0, \sigma_n^2\right)$ 独立同分布，

并且信号与噪声不相关。求 $\hat{s}_{ABS}$

1.5.6 贝叶斯估计

使估计所承担的平均风险最小的一种估计。

定义θ估计为$\hat{\theta}$所承担的风险（代价函数）$c\left(\theta,\hat{\theta}\right)$,

则估计的平均风险为

$$C\left(\hat{\theta}\right)=\int_{(\mathbf{x})}\int_{(\theta)}c\left(\theta,\hat{\theta}\right)f\left(\theta,\mathbf{x}\right)d\theta d\mathbf{x}=\int_{(\mathbf{x})}C\left(\hat{\theta}\mid\mathbf{x}\right)f\left(\mathbf{x}\right)d\mathbf{x}$$

即

$$\hat{\theta}_{BAY}=\arg\min_{\hat{\theta}}C\left(\hat{\theta}\right)=\arg\min_{\hat{\theta}}C\left(\hat{\theta}\mid\mathbf{x}\right)$$

（1）最小均方误差估计与贝叶斯估计

若定义 $$c\left(\theta,\hat{\theta}\right)=\left(\theta-\hat{\theta}\right)^2$$

平均风险

$$C\left(\hat{\theta}\right)=\int_{(\mathbf{x})}\int_{(\theta)}\left(\theta-\hat{\theta}\right)^2 f\left(\theta,\mathbf{x}\right)d\theta d\mathbf{x}=E\left\{\left(\theta-\hat{\theta}\right)^2\right\}$$

则 $$\hat{\theta}_{BAY}=\hat{\theta}_{MS}$$

（2）最小平均绝对误差估计与贝叶斯估计

若定义 $$c\left(\theta,\hat{\theta}\right)=\left|\theta-\hat{\theta}\right|$$

则平均风险

$$C\left(\hat{\theta}\right)=\int_{(\mathbf{x})}\int_{(\theta)}\left|\theta-\hat{\theta}\right| f\left(\theta,\mathbf{x}\right)d\theta d\mathbf{x}=E\left\{\left|\theta-\hat{\theta}\right|\right\}$$

则 $\hat{\theta}_{BAY}=\hat{\theta}_{ABS}$

（3）最大后验概率估计与贝叶斯估计

若定义

$$c\left(\theta,\hat{\theta}\right)=\begin{cases}1, & \left|\theta-\hat{\theta}\right|\geq\dfrac{\Delta}{2}\\ 0, & \left|\theta-\hat{\theta}\right|<\dfrac{\Delta}{2}\end{cases}$$

$\Delta>0$是很小的常数

则 $\hat{\theta}_{BAY}=\hat{\theta}_{MAP}$

1.5.7 最小二乘估计

基于参量的线性观测模型，把估计作为确定的最优化问题来处理。

线性观测方程 $x_i = h_i\theta + n_i, \quad i = 1, 2, \cdots, N$

估计的误差平方和为 $\xi\left(\hat{\theta}\right) = \sum_{i=1}^{N}\left(x_i - h_i\hat{\theta}\right)^2$

则 $\hat{\theta}_{LS} = \arg\min_{\hat{\theta}} \xi\left(\hat{\theta}\right) = \arg\min_{\hat{\theta}} \sum_{i=1}^{N}\left(x_i - h_i\hat{\theta}\right)^2$

即

$$\frac{\partial}{\partial\hat{\theta}}\xi\left(\hat{\theta}\right)\Big|_{\hat{\theta}=\hat{\theta}_{LS}} = -2\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - h_i\hat{\theta}\right)h_i = 0$$

解得

$$\hat{\theta}_{LS} = \frac{\sum_{i=1}^{N} h_i x_i}{\sum_{i=1}^{N} h_i^2}$$

线性观测方程的矢量形式

$$\mathbf{x} = \mathbf{h}\theta + \mathbf{n}$$

$\mathbf{x} = \left[x_1, x_2, \cdots, x_N\right]^T$，$\mathbf{h} = \left[h_1, h_2, \cdots, h_N\right]^T$，$\mathbf{n} = \left[n_1, n_2, \cdots, n_N\right]^T$。

误差平方和为

$$\xi\left(\hat{\theta}\right) = \left(\mathbf{x} - \mathbf{h}\hat{\theta}\right)^T \left(\mathbf{x} - \mathbf{h}\hat{\theta}\right)$$

解得 $\hat{\theta}_{LS} = \left(\mathbf{h}^T \mathbf{h}\right)^{-1} \mathbf{h}^T \mathbf{x}$

例：　已知如下观测样本

$$x_i = s + n_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, N$$

其中信号 $s \sim N\left(0, \sigma_s^2\right)$，噪声 $n_i \sim N\left(0, \sigma_n^2\right)$ 独立同分布，

并且信号与噪声不相关。求 $\hat{s}_{LS}$

多参量最小二乘估计：

多参量线性观测方程为 $\mathbf{x}=\mathbf{H}\boldsymbol{\theta}+\mathbf{n}$

误差的平方和为 $\xi\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)=\left[\mathbf{x}-\mathbf{H}\hat{\boldsymbol{\theta}}\right]^T\left[\mathbf{x}-\mathbf{H}\hat{\boldsymbol{\theta}}\right]$

则 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}=\arg\min_{\hat{\boldsymbol{\theta}}}\xi\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)$

即 $\left.\frac{\partial}{\partial\hat{\boldsymbol{\theta}}}\xi\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\right|_{\hat{\boldsymbol{\theta}}=\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}}=-2\mathbf{H}^T\left(\mathbf{x}-\mathbf{H}\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)=0$

解得 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}=\left(\mathbf{H}^T\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{x}$

多参量加权最小二乘估计：

误差的平方和为 $\xi_W\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)=\left[\mathbf{x}-\mathbf{H}\hat{\boldsymbol{\theta}}\right]^T\mathbf{W}\left[\mathbf{x}-\mathbf{H}\hat{\boldsymbol{\theta}}\right]$

$\mathbf{W}$ 为 $N\times N$ 维的对称正定加权矩阵。

则 $$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LSW}=\arg\min_{\hat{\boldsymbol{\theta}}}\xi_W\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)$$

即 $$\frac{\partial}{\partial\hat{\boldsymbol{\theta}}}\xi_W\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\Bigg|_{\hat{\boldsymbol{\theta}}=\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LSW}}=-2\mathbf{H}^T\mathbf{W}\left[\mathbf{x}-\mathbf{H}\hat{\boldsymbol{\theta}}\right]=0$$

解得 $$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LSW}=\left(\mathbf{H}^T\mathbf{W}\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{W}\mathbf{x}$$

估计误差矩阵为

$$E\left\{\left[\boldsymbol{\theta}-\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LSW}\right]\left[\boldsymbol{\theta}-\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LSW}\right]^T\right\}=\left(\mathbf{H}^T\mathbf{W}\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{W}\mathbf{R}_\mathbf{n}\mathbf{W}\mathbf{H}\left(\mathbf{H}^T\mathbf{W}\mathbf{H}\right)^{-1}$$

其中$\mathbf{R}_\mathbf{n}=E\left\{\mathbf{n}\mathbf{n}^T\right\}$是对称正定矩阵，可分解为

$$\mathbf{R}_\mathbf{n}=\mathbf{D}^T\mathbf{D}$$

利用矩阵施瓦兹不等式

$$\mathbf{B}^T\mathbf{B}\geq\left(\mathbf{A}\mathbf{B}\right)^T\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^T\right)^{-1}\left(\mathbf{A}\mathbf{B}\right)$$

令 $\mathbf{A}=\mathbf{H}^T\mathbf{D}^{-1},\ \mathbf{B}=\mathbf{D}\mathbf{W}\mathbf{H}\left(\mathbf{H}^T\mathbf{W}\mathbf{H}\right)^{-1}$

可得 $$E\left\{\left[\boldsymbol{\theta}-\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LSW}\right]\left[\boldsymbol{\theta}-\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LSW}\right]^{T}\right\} \geq \left(\mathbf{H}^{T}\mathbf{R}_{\mathbf{n}}^{-1}\mathbf{H}\right)^{-1}$$

当 $\mathbf{W}=\mathbf{R}_{\mathbf{n}}^{-1}$ 时上式中等式成立，即估计误差达到最小。

此时 $$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LSW}=\left(\mathbf{H}^{T}\mathbf{R}_{\mathbf{n}}^{-1}\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^{T}\mathbf{R}_{\mathbf{n}}^{-1}\mathbf{x}$$

例：非线性最小二乘估计

以雷达系统为例，假设观测信号为

$$x_k = A\cos\left(\omega_0 k + \theta\right) + n_k \qquad k = 1, 2, \cdots N$$

式中，振幅A和相位$\theta \in [-\pi, \pi]$为待估计参量，

频率ω_0 已知，n_k 为观测噪声。

1.6估计量评价指标

（1）无偏性

对于确定参量θ，若估计量 $\hat{\theta}$ 满足

$$E\left\{\hat{\theta}\right\}=\theta$$

或对于随机参量θ，若估计量 $\hat{\theta}$ 满足

$$E\left\{\hat{\theta}\right\}=E\left\{\theta\right\}$$

则称所求的估计量 $\hat{\theta}$ 具有无偏性，是无偏估计，

否则就是有偏估计。

确定参量有偏估计的偏差量为 $E\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}-\boldsymbol{\theta}$

随机参量有偏估计的偏差量为 $E\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}-E\left\{\boldsymbol{\theta}\right\}$

当观测样本数趋于无穷时，若

$$\lim_{N\to+\infty} E\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}=\boldsymbol{\theta}$$

或

$$\lim_{N\to+\infty} E\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}=E\left\{\boldsymbol{\theta}\right\}$$

则称估计量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 具有渐进无偏性，是渐近无偏估计。

（2）有效性

- 均方误差衡量了估计量在真值附近的密集程度。
- 如果某个无偏估计量的均方误差是所有估计量均方误差的最小值，称该估计量是有效估计量。
- 均方误差的最小值由克拉美-罗不等式给出。
- 无偏估计量的有效率

$$\eta = \frac{Var_{\min}\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}}{Var\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}_1\right\}} \qquad Var\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}_1\right\} = E\left\{\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1 - \boldsymbol{\theta}\right)^T\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1 - \boldsymbol{\theta}\right)\right\}$$

η 越大估计质量越好，对于有效估计$\eta = 1$ 。

当观测样本数N趋于无穷时，若

$$\lim_{N \to +\infty} \eta = 1$$

则称该估计量为渐近有效估计量。

对某一估计量，若 $\lim\limits_{N \to +\infty} \eta = \eta_0 \neq 1$

则称η_0为渐进有效率。

（3）一致性

若观测样本数N趋于无穷时，估计量越来越接近其真值，则此时的估计量称为一致估计量。

一致估计的两种度量方法：

A 当$N \to +\infty$时，估计量$\hat{\boldsymbol{\theta}}$在概率意义上收敛于 $\boldsymbol{\theta}$

$$\lim_{N \to +\infty} P\left(\left\|\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}\right\| < \varepsilon\right) = 1$$

B 当$N \to +\infty$时，估计量$\hat{\boldsymbol{\theta}}$在均方意义上趋近于$\boldsymbol{\theta}$

$$\lim_{N \to +\infty} E\left\{\left\|\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}\right\|^2\right\} = 0$$

（4）充分性

对待定参量$\boldsymbol{\theta}$及其估计量$\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x})$,如果 $\boldsymbol{\theta}$ 的似然函数满足

$$f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})=g\left[\hat{\boldsymbol{\theta}}|\boldsymbol{\theta}\right]h(\mathbf{x})$$

其中,$h(\mathbf{x})\geq 0$ 且与$\boldsymbol{\theta}$ 无关，$g\left[\hat{\boldsymbol{\theta}}|\boldsymbol{\theta}\right]$ 是 $\hat{\boldsymbol{\theta}},\boldsymbol{\theta}$ 的函数，

则称$\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x})$ 为充分估计量。表明$g(\cdot)$中的$\hat{\boldsymbol{\theta}}$包含了观测

样本中关于待定参量的全部信息。

即从充分估计量中可以获取待定参量的全部信息，而其它

估计量中关于待定参量的信息总是小于充分估计量的。

1.7 克拉美-罗不等式

1.7.1 确定单参量估计的克拉美-罗不等式

1.7.2 确定矢量估计的克拉美-罗不等式

1.7.1 确定单参量估计的克拉美-罗不等式

对于确定单参量θ的无偏估计为$\hat{\theta}$, 有

$$E\left\{\left(\hat{\theta}-\theta\right)^2\right\} \geq \frac{1}{E\left\{\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f\left(\mathbf{x}\,|\,\theta\right)\right]^2\right\}} = -\frac{1}{E\left\{\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f\left(\mathbf{x}\,|\,\theta\right)\right\}}$$

当且仅当 $\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f\left(\mathbf{x}\,|\,\theta\right) = K(\theta)\left(\hat{\theta}-\theta\right)$ 时等号成立,

此时的估计量$\hat{\theta}$为有效估计量。

- 确定单参量的有效估计是它的最大似然估计。

1.7.2 确定矢量估计的克拉美-罗不等式

对确定矢量 $\boldsymbol{\theta}$ 的无偏估计为 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$，有

$$E\left\{\left(\hat{\theta}_i-\theta_i\right)^2\right\}\geq\left(\mathbf{J}^{-1}\right)_{ii}\quad i=1,2,\cdots,M$$

其中

$$\mathbf{J}=E\left\{\left[\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\theta}}\ln f\left(\mathbf{x}\,|\,\boldsymbol{\theta}\right)\right]\left[\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\theta}}\ln f\left(\mathbf{x}\,|\,\boldsymbol{\theta}\right)\right]^T\right\}=-E\left\{\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\theta}}\left[\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\theta}}\ln f\left(\mathbf{x}\,|\,\boldsymbol{\theta}\right)\right]^T\right\}$$

当且仅当 $\hat{\theta}_i-\theta_i=\sum_{j=1}^{M}K_{ij}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\ln f\left(\mathbf{x}\,|\,\boldsymbol{\theta}\right)\quad i=1,2,\cdots,M$ 时，

等号成立。